

ODREĐENI INTEGRAL U EKONOMSKIM FUNKCIJAMA

Radovan Damnjanović¹, Vlado Đurković², Miloš Miljković³

doi:10.5937/Oditor1803071D

Pregledni rad
UDK: 330.45:517.3

Apstrakt

Primena matematičkih modela našla je dominantno mesto u rešavanju problema ekonomskih nauka u drugoj polovini dvadesetog veka. U ovom radu prikazaćemo mogućnost korišćenja integralnog računa kod indeksa koncentracije dohotka.

Ovaj indeks predstavlja relativnu meru nejednakosti distribucije dohotka i često se može pronaći u ekonomskim analizama. Grafička interpretacija integralnog računa upotrebljava se radi lakše interpretacije rezultata istraživanja što će u ovom radu biti prikazano.

Ključne reči: integralni račun, ekonomska analiza, Lorencova kriva.

JEL: C54, C59

Uvod

Istorijiski se do pojma integrala nije došlo, polazeći od pojma diferencijala. Čak, neko vreme, na početku razvoja integralnog računa nije se ni znalo, kakva veza postoji između ta dva pojma.

Kada se razmatra funkcija $y = f(x)$ definisana na nekom odsečku $[a, b]$. Interval $[a, b]$ se podeli na n jednakih delova tako, da je $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$,

gde su $x_1, x_2, \dots, x_n$ krajevi malih intervala koji su zadržani u intervalu $[a, b]$. (Jiang, 2017) Vrednosti funkcije $f(x)$ na krajevima tih podintervala su: $f(x_1), f(x_2), f(x_{n-1}), f(x_n)$.

¹ Docent, dr Radovan Damnjanović, Univerzitet odbrane, Ulica Pavla Jurišića Šturma br. 33, Beograd, Srbija.

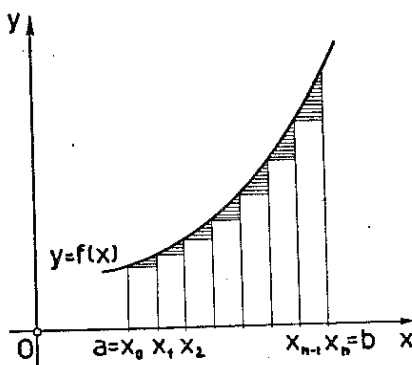
² Redovni profesor, dr Vlado Đurković, Univerzitet odbrane, Ulica Pavla Jurišića Šturma br. 33, Beograd, Srbija. e-mail: djurkovic.vlado@gmail.com

³ Miloš Miljković, M.A. Kopnena Vojska Srbije, Krusevac, Telefon +381 66 870 73 41, E-mail: milos.miljkovic.mekis@gmail.com

Šta je proizvod $f(x_i)(x_i - x_0) = f(x_i)\Delta x$?

On se može interpretirati grafički u vidu pravougla koji se nalaz u preseku linija i to krive i odsečka koji ona zatvara sa dve prave koje idu iz odsečka x_0 i x_i . Uopšte površina nekog i -tog pravougaonika je $f(x_i)\Delta x$ (Roetzel et al. 2017) dok je površina svih nekakvih pravougaonika $\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$. Ta površina razlikuje se od površine slike oivičene krivom $y = f(x)$, x ose, te pravcima $x=a$ i $x=b$ za šrafirani deo (Graph 1).

Graph 1. Odsečak integralnog računa



Ovako posmatran integralni račun ima primenu i u određivanju distribucije nejednakosti dohotka stanovništva (Stanojević, Đorđević, Volf, 2017). u određenom vremenskom periodu, što je ujedno i predmet ovog rada.

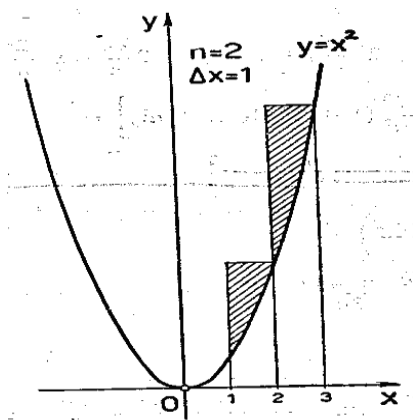
Određeni integral

Kada se interval $[a, b]$ podeli na veći broj pojedinačnih intervala $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, suma površina pravougaonika još manje će se razlikovati od površine te krivolinijske slike. Kad $n \rightarrow \infty$, odnosno $\Delta x \rightarrow 0$, granična vrednost te sume $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_i) \cdot \Delta x$ potpuno je jednaka površini između krive $y = f(x)$, pravca $x=a$ i $x=b$, te x ose.

Ona se označava sa $\int_a^b f(x)dx$ i naziva se *određenim integralom funkcije $f(x)$ u granicama od a do b* . Određeni integral je, dakle, granična vrednost sume površine parcijalnih pravougaonika. Znak integrala, izduženo slovo S , početno je slovo reči „suma”. (Pejović et al. 2014).

Za potrebe našeg istraživanja uzećemo jednu kvadratnu funkciju $y = x^2$ u intervalu $[1, 3]$. Ako se interval $[1, 3]$ podeli na dva dela tako, da je $\Delta x = 1$, imamo $\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \Delta x = 2^2 + 3^2 = 13$. Ova površina razlikuje se za šrafirani deo od površine pod krivom $y = x^2$ (Graph 2). (Durand, Ellis, Christofides, 2016)

Graph 2. Određeni integral kvadratne funkcije $n=2$

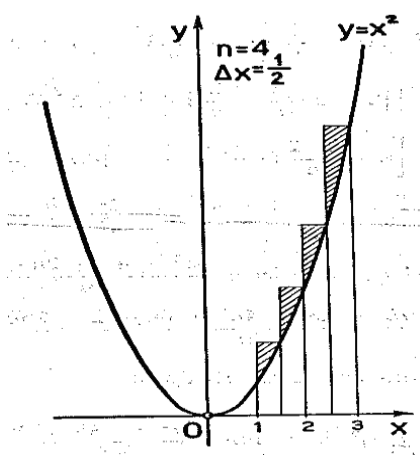


U slučaju da se n poveća tako da sada iznosi $n = 4$ (slika 3), tada je

$$\Delta x = \frac{1}{2} \text{ i } \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot \Delta x = (1,5^2 + 2^2 + 2,5^2 + 3^2) \cdot \frac{1}{2} = 10,75.$$

Površina je manja, dakle, bliža površini posmatranog krivolinijskog grafikona.

Graph 3. Određeni integral kvadratne funkcije $n=4$



Kolika je tačno naznačena površina? U tu svrhu razdelimo interval $[1,3]$ u n podintervala. (Kim et al. 2015) Na njihovim desnim granicama $1+\frac{2}{n}, 1+2\cdot\frac{2}{n}, \dots, 1+n\cdot\frac{2}{n}$, funkcija $y = x^2$ ima sledeće vrednosti $(1+\frac{2}{n})^2, (1+2\cdot\frac{2}{n})^2, \dots, (1+n\cdot\frac{2}{n})^2$.

Kada to imamo, lako je izračunati sumu:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \Delta x &= \frac{2}{n} \left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 + \left(1+2\cdot\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(1+n\cdot\frac{2}{n}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{2}{n} \left[\left(1+2\cdot\frac{2}{n} + \frac{2^2}{n^2}\right) + \left(1+2\cdot\frac{2\cdot 2}{n} + 2^2\frac{2^2}{n^2}\right) + \dots + \left(1+2\cdot\frac{2n}{n} + n^2\frac{2^2}{n^2}\right) \right] = \\ &= \frac{2}{n} \left[n + \frac{2\cdot 2}{n}(1+2+\dots+n) + \frac{2^2}{n^2}(1+2^2+\dots+n^2) \right] = \\ &= \frac{2}{n} \left[n + \frac{4}{n} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n + \frac{2^2}{n^2} \cdot \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \right] = \\ &= \frac{2}{n} \left[n + 2 + 2n + \frac{4n^2 + 4n + 2n + 2}{3n} \right] = \\ &= \frac{2}{n} \cdot \frac{9n^2 + 6n + 4n^2 + 6n + 2}{3n} = \frac{26n^2 + 24n + 4}{3n^2}, \text{ i njenu graničnu vrednost:} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{26n^2 + 24n + 4}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{26 + \frac{24}{n} + \frac{4}{n^2}}{3} = \frac{26}{3} = 8,6. \end{aligned}$$

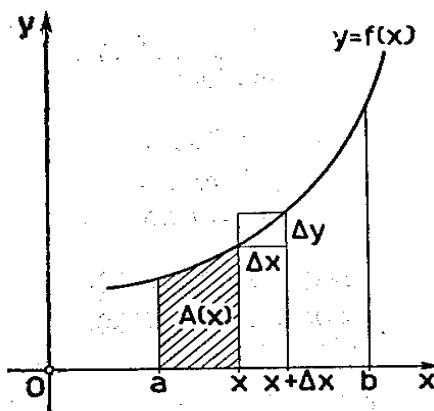
Integralni račun i diferenciranje

U prethodnom delu smo prikazali kako se može koristiti određeni integral, ali pojavom diferenciranja sada smo u stanju da to uradimo mnogo brže i jednostavnije. Da se to pokaže vratimo se opštem problemu integracije i razmotrimo opet funkciju $y = f(x)$ u intervalu $[a,b]$ (Gupta, V., & Agrawal, D. 2018).

Može se zamisliti, da je površina $A(x)$ opisana pomeranjem ordinate krive $f(x)$ od tačke $x=a$ do neke neodređene tačke x . Ako ordinata nastavi kretanje, tada će pomak Δx porasti za $\Delta A(x)$. (Spalević et al. 2016). Taj prirast površine zadovoljava ovu relaciju $y \cdot \Delta x < \Delta A < (y + \Delta y) \cdot \Delta x$, tj. manji je od površine opisanog, a veći od površine upisanog pravougaonika (Graph 4).

Ta nejednakost stoji samo za rastuće funkcije, kao što je ona na slici za opadajuće važi obrnuta nejednakost, gde znak $<$, prelazi u znak $>$. (Bartošová et al. 2015) Ako se ta nejednačina podeli sa Δx , dobija se $y < \frac{\Delta A}{\Delta x} < y + \Delta y$.

Graph 4. Prirast rastuće funkcije



Ako $\Delta x \rightarrow 0$, tada i $\Delta y \rightarrow 0$, jer je kriva na slici 4 neprekidna, s tim u vezi je $y \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq y + \Delta y$, odakle je $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = y$, što možemo pisati i ovako $\frac{dA}{dx} = y$ odnosno kao jednu diferencijalnu jednačinu. Ta jednačina rešava se, kao što je poznato, na sledeći način: $dA = ydx$, ili $dA(x) = f(x)dx$, odnosno $\int dA(x) = \int f(x)dx$, dakle $A = \int f(x)dx = F(x) + C$, gde je $F(x)$ jednostavna funkcija od $f(x)$, tj. $F'(x) = f(x)$.

Kada je $x=a$, površina između a i x jednaka je nuli, odnosno $A(a)=0$ tada se iz ovoga uslova može se odrediti konstanta C . U stvari, zamenimo li $x=a$ u prethodnu jednačinu, imamo

$$A(a) = F(a) + C, \quad 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a), \quad \text{i odatle} \quad A(x) = F(x) - F(a),$$

$$A(b) = F(b) - F(a), \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

To znači, da je površina pod krivom $y = f(x)$, u granicama od a do b jednaka razlici vrednosti jednostavne fankcije $F(x)$ u gornjoj odnosno donjoj granici. Da se pojednostavni označavanje, uvodi se oznaka: $F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Sada možemo izračunatii vrednost posmatrane površine iz prethodnog dela po navedenom obrascu formule gde dobijamo da je $\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1}{3} = 8,6$.

Indeks koncentracije dohotka

Grafički izraz povezanosti kumulativnih procenata agregata dohotka sa kumulativnim procentima nosilaca dohotka je Lorencova kriva. (Maksimović et al. 2012) Pod agregatom dohotka podrazumeva se proizvod veličine dohotka i broja nosilaca tog dohotka (Rich, 2012).

Ova definicija Lorencove krive upućuje na to, kako se ona konstruiše. Najpre treba izračunati agregate dohotka, (Miljković et al. 2018). zatim izraziti agregate dohotka i brojeve nosilaca dohotka u procentima (od ukupnog dohotka, odnosno od broja svih nosilaca) nakon čega je potrebno te procenite kumulirati i na kraju ih grafički prikazati (Petrov et al. 2018). Ovaj postupak ćemo prikazati na našem primeru ove distribucije, date u Tabeli 1.

Tabela 1. Distribucija dohodaka u R. Srbiji

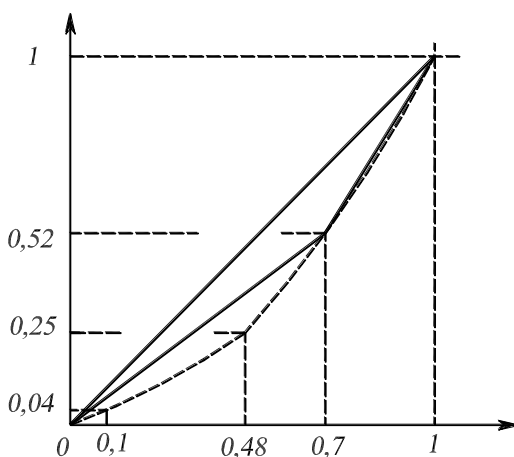
Dohoci u hilj. dinara.	Broj nosilaca	Agregat dohotka u hilj. dinara.	Broj nosilaca u procentima	Agregat dohotka u procentima	Kumulativni procenti	
					nosilaca dohotka	agregarta dohotka
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
10	50	500	10	4	10	4
15	0	0	0	0	10	4
20	300	6000	60	48	70	52
30	0	0	0	0	70	52
40	<u>150</u>	<u>6000</u>	<u>30</u>	<u>48</u>	100	100
	500	12500	100	100		

Izvor: Istraživanje autora

Prve tri kolone zauzimaju apsolutni brojevi (visine dohotka, nosilaca i agregata dohotka). Podaci iz 2. i 3. kolone prikazani su u procentima u 4. odnosno 5. koloni. Preostale dve kolone donose kumulativne nizove tih procenata. Ova dva poslednja niza jasno ukazuju na nejednakosti razmatrane distribucije. Iz njih čitamo da na 10% primalaca sa nižim dohotkom otpada samo 4% dohotka, a na prvih 70% primalaca svega 52% ukupnog dohotka.

Lorencova kriva se prikazuje u pravouglom koordinatnom sistemu tako, da se na osu apscise nanose kumulativni procenti nosilaca dohotka (Jeremić et al. 2017), a na osu ordinate kumulativni procenti agregata dohotka (Graph 5).

Graph 5. Lorencova kriva dohodaka



Na prikazanom grafiju su dve krive - empirijska Lorencova kriva koja spaja tačke $(0, 0)$, $(0,10; 0,04)$, $(0,70; 0,52)$, i $(1,1)$, i izravnata Lorencova kriva. Ova poslednja ima jednačinu $y = 0,990x^2 + 0,053x - 0,005$, koja je određena metodom najmanjih kvadrata.

Sad ćemo pokazati, kako se iz svake od prikazanih krivih računa indeks koncentracije dohotka. Indeks koncentracije jednak je odnosu površine između Lorencove krive i pravca jednakosti prema površini trougla u kome se nalazi ta kriva. Kako je površina tog trougla jednaka $\frac{1}{2}$ uvek veća ili najviše jednaka površini, koju zatvara Lorencova kriva sa pravcem jednake polovine, indeks koncentracije je broj iz intervala $[0,1]$.

Indeks koncentracije K , koji pripada empirijskoj Lorencovoj krivoj može se izračunati po formuli: $K = \sum_{i=1}^n x_{i-1}y_i - x_i y_{i-1}$, gde je x_i kumulativni procenat broja nosilaca a y_i kumulativni procenat agregata dohotka.

U našem istraživanju ona iznosi prema sledećem:

$$K = 0,10 \cdot 0,52 - 0,70 \cdot 0,04 + 0,70 - 0,52 = 0,204.$$

Indeks koncentracije koji pripada neprekidnoj Lorencovoj krivoj, dobija se integracijom na način. Ako se empirijska Lorencova kriva izravna parabola $y = ax^2 + bx + c$, kao što je to učinjeno, tada je

$$K = \frac{\frac{1}{2} - \int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c\right).$$

Po toj formuli izravната kriva daje: $K = 1 - 2\left(\frac{0,990}{3} + \frac{0,053}{2} - 0,005\right) = 0,296.$

Može biti reči i o koncentraciji prema sredini distribucije. Njena relativna mera je koeficijent varijacije $V = \frac{\sqrt{\mu_2}}{\bar{x}}$, gde je μ_2 varijansa, a $\bar{x}$ srednja vrednost distribucije. Što je koeficijent varijacije veći, koncentracija prema sredini je manja.

Može se pokazati da je, za svaku distribuciju dohodaka, indeks koncentracije manji od koeficijenta varijacije. Čak između te dve mere postoji ova strožija relacija: $\sqrt{2}K \leq V$.

Zaključak

Možemo zaključiti da je to je prikazana kriva distribucije dohodaka rastuća kriva, konkavna prema dijagonali. Dijagonalni pravac prikazane krive pokazuje jednaku raspodelu dohodaka. Što je kriva neke raspodele dohotka konkavnija prema tom pravcu, jača je koncentracija dohotka prema vrhu distribucije, odnosno kod nosilaca sa najvećim dohotkom.

Maksimalnoj koncentraciji dohotka kod gornjeg sloja primalaca odgovara Lorencova kriva koja se pruža od koordinatnog početka $(0,0)$ po x osi do tačke $(1,0)$, gde ima rast od 1. Ta stepenasta, neopadajuća kriva maksimalne koncentracije egzistira kako možemo videti samo u teoriji. Što znači da njena

egzistencija označava, ne postojanje raspodele. Ona je ustupila mesto potpunoj koncentraciji - jedno lice nosi ceo dohodak. ž

Lorencove krive u užem smislu, koje se podudaraju sa pojmom realne empirijske Lorencove krive, smeštaju se, dakle, između te dve granične krive, između pravca jednake raspodele, koju karakteriše odsustvo koncentracije, odnosno diferencijacije i krive kompletne koncentracije.

Literatura

1. Bartošová, V., Majerčák, P., Hrašková, D. (2015) Taking Risk into Account in the Evaluation of Economic Efficiency of Investment Projects: Traditional Methods, *Procedia Economics and Finance*, vol. 24, pp. 68-75
2. Durand, H., Ellis, M., Christofides, P.D. (2016) Economic model predictive control designs for input rate-of-change constraint handling and guaranteed economic performance, *Computers & Chemical Engineering*, vol. 92, pp. 18-36
3. Gupta, V., Agrawal, D. [2018]. Approximation results by certain genuine operators of integral type. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 42(3), 335-348.
4. Kim, K., Petrin, A., Song, S. (2016) Estimating production functions with control functions when capital is measured with error, *Journal of Econometrics*, 190(2), pp. 267-279
5. Khoo, M.B., Yeong, W. C., Lee M. H., Lim, S. L. (2015) Economic and economic-statistical designs of the side sensitive group runs chart, *Computers & Industrial Engineering*, vol. 90, pp. 314-325
6. Jeremić, D., Antonović, R., Stanojević, S., & Radović, T. (2017). Elementi multivarijantne analize kriminaliteta na oskudnim skupovima. *Oditor - časopis za Menadžment, finansije i pravo*, 3(2), 18-36.
7. Jiang, S. (2017) The cause of an integral correction mechanism of the real exchange rate, *Economics Letters*, vol. 161, pp. 66-70
8. Maksimović, L., Kostić, M. [2012]. Ograničenja u primeni pokazatelja koncentracije - primer tržišta osiguranja Srbije, Hrvatske, Slovenije, Rumunije i Austrije. *Ekonomika preduzeća*, 60(3-4), 199-205.
9. Mihajlović, M., Karović, S., Ristić, S., & Radovanović, G. (2016). Application of dynamic programming in planning costs of telecommunication security operations to provide aid to civilian authorities. *Management: Journal for Theory and Practice Management*, 21(81), 67-76.
10. Miljković, M., Savić, A. [2018]. Analiza dvostrukog ekonomskog oporezivanja i mogućnost njegove primene u finansiranju budžeta. *Oditor - časopis za Menadžment, finansije i pravo*, 4(2), 58-66.

11. Pejović, B. B., Mičić, V. M., Perušić, M. D., Tadić, G. S., Vasiljević, L. C., & Smiljanić, S. N. [2014]. Predlog za određivanje promene entropije poluidealnog gasa primenom srednjih vrednosti temperaturnih funkcija. *Hemijska industrija*, 68(5), 615-628.
12. Petrov, V., Trivić, N. [2018]. Problem definisanja i merenja održivog dohotka. *Anali Ekonomskog fakulteta u Subotici*, (39), 19-31.
13. Rich, D. [2012]. Baumolova bolest u Americi. *Megatrend revija*, 9(1), 99-109.
14. Roetzel, A., Fuller, R., Rajagopalan, P. (2017) Integral sustainable design – Reflections on the theory and practice from a case study, *Sustainable Cities and Society*, vol. 28, pp. 225-232
15. Spalević, Ž., Vićentijević, K., & Ateljević, M. [2018]. Pravno-ekonomska analiza stepena razvoja digitalne ekonomije. *Trendovi u poslovanju*, 6(1), 29-37.
16. Stanojević, S., Đorđević, N., & Volf, D. (2017). Primena kvantitativnih metoda u predviđanju poslovanja privrednih društava. *Oditor - časopis za Menadžment, finansije i pravo*, 3(1), 92-101.

SPECIFIC INTEGRAL IN ECONOMIC FUNCTIONS

Radovan Damnjanović⁴, Vlado Đurković⁵ Miloš Miljković⁶

Summary

The application of mathematical models has found a dominant place in the solution of the problem of economic science in the second half of the twentieth century. In this paper we will show the possibility of using an integral account with the income concentration index.

This index represents a relative measure of inequality in income distribution and can often be found in economic analysis. Graphic interpretation of an integral account is used to facilitate the interpretation of research results, which will be presented in this paper.

Key words: *integral account, economic analysis, Lorenz's curve.*

JEL: C54, C59

Datum prijema (Date recieved): 11.10.2018.

Datum prihvatanja (Date accepted): 04.12.2018.

⁴ Assistant Professor Radovan Damnjanović, Ph.D., University of Defense, Pavle Jurišić Sturma Street no. 33, Belgrade, Serbia.

⁵ Full professor, Dr Vlado Đurković, University of Defense, Pavle Jurišić Sturma Street no. 33, Belgrade, Serbia. e-mail: djurkovic.vlado@gmail.com

⁶ M.A. Miloš Miljković, Serbian Army, Kruševac, Phone +381 66 870 73 41, E-mail: milos.miljkovic.mekis@gmail.com